Научни трудове на Съюза на учените в България – Пловдив. Серия В. Техника и технологии. Том XVII, ISSN 1311 -9419 (Print); ISSN 2534-9384 (Online), 2019.
Scientific Works of the Union of Scientists in Bulgaria - Plovdiv. Series C. Technics and Technologies. Vol. XVII., ISSN 1311 -9419 (Print); ISSN 2534-9384 (Online), 2019

ДВУМЕРНО РИМАНОВО МНОГООБРАЗИЕ С ДВЕ ЦИРКУЛАНТНИ СТРУКТУРИ

Димитър Разпопов[1] и Ива Докузова[2]
[1]Аграрен университет – Пловдив
[2]ПУ „Паисий Хилендарски" – Пловдив

A TWO-DIMENSIONAL RIEMANNIAN MANIFOLD WITH TWO CIRCULANT STRUCTURES

Dimitar Razpopov[1] and Iva Dokuzova[2]
[1]Agricultural University – Plovdiv
[2]Plovdiv University Paisii Hilendarski – Plovdiv

Abstract. In this paper we consider a 2-dimensional Riemannian manifold with an almost product structure, whose trace is zero. The coordinates of the metric and of the additional structure with respect to some basis form circulant matrices. We find a necessary and sufficient condition for the parallelity of the structure with respect to the Levi-Civita connection. We obtain an equation of a circle, determined with respect to an indefinite metric, associated with the Riemannian metric. We construct examples of the considered manifolds, which are 2-dimensional surfaces embedded in a 3-dimensional Euclidean space.

Keywords. Riemannian manifold, almost product structure, circulant matrix.

Въведение

Римановите многообразия със структура на почти произведение са изучавани активно през последните години от чужди и български геометри, например в (Gribacheva-Mekerov, 2014), (Naveira, 1983) , (Staikova-Gribachev, 1992) .

Тримерните и четиримерни риманови многообразия с допълнителни циркулантни структури са изследвани от авторите на тази статия, както и от техни съавтори. Една част от резултатите са публикувани в работите (Dzhelepov, 2018), (Dzhelepov-Dokuzova-Razpopov, 2011) и (Razpopov, 2015). В (Dokuzova, 2017) е отбелязано, че допълнителната структура на четиримерните многообразия поражда структура на почти произведение. В настоящата работа допълваме нашето изследване върху римановите многообразия с циркулантни структури, с резултати получени за двумерни многообразия от този тип.

Разглеждаме двумерно диференцируемо многообразие M, снабдено с риманова метрика g и със структура на почти произведение Q, като матриците от координатите на g и Q са циркулантни, т.е. двете структури са циркулантни. Многообразието (M, Q, g) има нулева следа на изображението. В §1. даваме основни сведения за разглежданото многообразие и намираме необходимо и достатъчно условие за паралелност на структурата Q. В §2. получаваме уравнение на окръжност, зададена относно присъединената индефинитна метрика, която е определена с помощта на g и Q. В §3. намираме примери за многообразия (M, Q, g), които са двумерни повърхнини вложени в тримерно евклидово пространство със зададена декартова координатна система $Oxyz$.

Нека M е двумерно реално диференцируемо многообразие, снабдено с тензорна структура Q от тип (1, 1). Компонентите на Q в допирателното пространство T_pM, за всяка точка p от M, в някаква база на T_pM, задаваме с циркулантната матрица

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогава Q удовлетворява равенството

$$Q^2 = \mathrm{id}. \qquad (1)$$

Снабдяваме *(M, Q)* с метрика g, като g и Q са съгласувани с условието

$$g(Qu, Qv) = g(u, v). \qquad (2)$$

В равенство (2), както и по-нататък, с u и v ще означаваме гладки векторни полета върху M или произволни вектори от T_pM.

Лесно се проверява, че g и Q удовлетворяват условието (2) тогава и само тогава, когато компонентите на g относно същата база на T_pM образуват циркулантната матрица

$$g = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

където $A=A(p)$ и $B=B(p)$ са гладки функции на точка $p(x^1, x^2)$ от M.

По-нататък разглеждаме многообразие *(M, Q, g)*, за което са изпълнени условията $A(p)>B(p)>0$ за всяка точка p от M. От последните неравенства следва, че g е положително дефинитна метрика. Ще отбележим, че *(M, Q, g)* е риманово многообразие със структура на почти произведение.

Нека ∇ е свързаността на Леви-Чивита породена от g. Многообразието *(M, Q, g)* има паралелна структура Q относно ∇, ако е изпълнено равенството

$$\nabla Q = 0. \qquad (4)$$

Условието (4) за паралелност на Q обуславя редица диференциално-геометрични свойства на *(M, Q, g)*.

Теорема 1. *Всяко двумерно многообразие (M, Q, g) удовлетворява (4), точно когато е в сила матричното равенство*

$$\mathrm{grad}A = (\mathrm{grad}B)Q. \qquad (5)$$

Доказателство. Нека с g_{ij} и с Q_j^k са означени локалните координати съответно на g и Q, а матрицата (g^{ij}) е обратна на матрицата (g_{ij}). Ако Γ_{ij}^k са символите на Риман-Кристофел за ∇, тогава имаме формулите (Yano, 1965):

$$\Gamma_{ij}^{ks} = g^{ks}(\partial_i g_{js} + \partial_j g_{is} - \partial_s g_{ij}), \qquad \nabla_i Q_j^k = \partial_i Q_j^k + \Gamma_{is}^k Q_j^s - \Gamma_{ij}^s Q_s^k, \quad (6)$$

където i, j, k, s приемат стойности от множеството $\{1, 2\}$.

Чрез (3) и първото равенство на (6) пресмятаме

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2D}(AA_1 - 2BB_1 + BA_2), \ \Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2D}(AA_2 - BA_1), \ \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2D}(2AB_1 - BA_1 - AA_2),$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2D}(2AB_2 - BA_2 - AA_1), \ \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2D}(AA_1 - BA_2), \ \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2D}(AA_2 - 2BB_2 + BA_1),$$

където $D = A^2 - B^2$, $A_i = \dfrac{\partial A}{\partial x^i}$, $B_i = \dfrac{\partial B}{\partial x^i}$.

Тогава, като използваме (1) и второто равенство на (6) намираме, че $\nabla Q = 0$ е в сила, точно когато са изпълнени $A_1 = B_2$, $A_2 = B_1$, които са еквивалентни на (5). □

§2. Уравнение на окръжност по отношение на индефинитна метрика

Добре известно е, че дължината на всеки вектор *u* и косинусът на ъгъла между два ненулеви вектора *u* и *v* се намират съответно с равенствата:

$$|u| = \sqrt{g(u,u)}, \qquad \cos\angle(u,v) = \frac{g(u,v)}{|u||v|}. \qquad (7)$$

Нека $\varphi \in [0,\pi]$ е ъгълът между векторите *u* и *Qu*. Без ограничение на общността може да предположим, че *u* е произволен единичен вектор от T_pM, т.е. $|u| = 1$. Тогава съгласно (7) имаме

$$g(u,Qu) = \cos\varphi. \qquad (8)$$

Очевидно, ако $\varphi = 0$, то $Qu = u$ и следователно *u* е собствен вектор за *Q*. Ако $\varphi = \pi$, то $Qu = -u$, т.е. *u* и *Qu* са противоположни вектори.

Нека $\{u, Qu\}$ е база на T_pM. В този случай φ е в интервала $(0,\pi)$. Съществува ортонормирана база от вида $\{u, Qu\}$, според (Staikova-Gribachev-Mekerov, 1987). Ще дадем един пример за такава база.

Нека *u* е произволен единичен вектор на T_pM. Задаваме векторите *v* и *Qv* с равенствата:

$$v = -\frac{|\cos\varphi|\sqrt{1-\sin\varphi}}{\sqrt{2}\sin\varphi\cos\varphi}u + \frac{|\cos\varphi|}{\sqrt{2}\sin\varphi\sqrt{1-\sin\varphi}}Qu,$$

$$Qv = \frac{|\cos\varphi|}{\sqrt{2}\sin\varphi\sqrt{1-\sin\varphi}}u - \frac{|\cos\varphi|\sqrt{1-\sin\varphi}}{\sqrt{2}\sin\varphi\cos\varphi}Qu.$$

С помощта на (1) и (8) пресмятаме $g(v,v) = 1$ и $g(v,Qv) = 0$, т.е. $\{v, Qv\}$ е ортонормирана база на T_pM.

Присъединената метрика $\tilde{g}$ върху *(M, Q, g)* е определена с равенството

$$\tilde{g}(u,v) = g(u,Qv). \qquad (9)$$

Тъй като тя е необходимо индефинитна, то за произволен вектор *u* е в сила

$$\tilde{g}(u,u) = a, \qquad a \in R. \qquad (10)$$

Според физичната терминология имаме следното

Определение 1. Нека $\tilde{g}$ е присъединената метрика върху *(M, Q, g)*. Ако вектор *u* удовлетворява неравенството $\tilde{g}(u,u) > 0$ (съотв. $\tilde{g}(u,u) < 0$), тогава *u* е пространствено-подобен (съотв. времеподобен) вектор. Ако ненулевият вектор *u* удовлетворява $\tilde{g}(u,u) = 0$, тогава *u* е изотропен.

В сила е следната

Теорема 2. *Нека $\tilde{g}$ е присъединената метрика върху (M, Q, g). Следните твърдения са в сила.*

*а) Вектор **u** е пространствено-подобен, точно когато $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$.*

*б) Вектор **u** е изотропен, точно когато $\varphi = \frac{\pi}{2}$.*

*в) Вектор **u** е времеподобен, точно когато* $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

Доказателство. Като използваме (8), (9) и (10), получаваме $\tilde{g}(u,u) = \cos\varphi$.
Тогава от Определение 1. следват случаите а), б) и в). □

Окръжност в T_pM с център p, по отношение на $\tilde{g}$ върху *(M, Q, g)*, е определена с (10).

Теорема 3. *Нека* $\tilde{g}$ *е присъединената метрика върху (M, Q, g). Ако* $\{v, Qv\}$ *е ортонормирана база на* T_pM *и* p_{xy} *е координатна система, такава че* $v \in p_x, Qv \in p_y$*, то окръжността, зададена с (10), има уравнение* $2xy = a$ *по отношение на* p_{xy}.

Доказателство. Разглеждаме вектор $u = x^1 v + x^2 Qv$ и неговия образ Qu, който съгласно (1) има представянето $Qu = x^1 Qv + x^2 v$. Като използваме равенствата (7), (8), (9) и условията $g(v, Qv) = 0$, $g(v,v) = 1$, от (10) получаваме $2xy = a$, което е уравнение на хипербола при $a \neq 0$ или на две прави при $a = 0$. □

§3. Примери за двумерно многообразие *(M, Q, g)*

А) Задаваме повърхнина S_1 относно *Oxyz* с уравненията

$$S_1: \quad x = e^{x^1}\cos x^2, \quad y = e^{x^1}\sin x^2, \quad z = \cos(x^1 + x^2).$$

Тогава g има локални координати

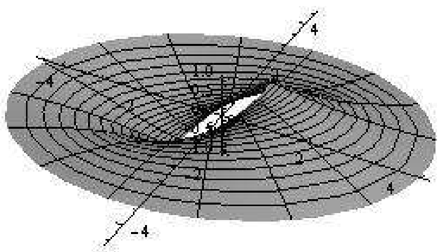
$$g_{11} = g_{22} = A = e^{2x^1} + \sin^2(x^1 + x^2), \quad g_{12} = g_{21} = B = \sin^2(x^1 + x^2).$$

Условията $A(p) > B(p) > 0$ са изпълнени за всяка точка $p(x^1, x^2)$ и g е положително дефинитна метрика.
С директна проверка в (5) установяваме, че функциите A и B не удовлетворяват условията на Теорема 1., т.е. $\nabla Q \neq 0$.

И така, в сила е

Твърдение 4. *Повърхнината* S_1*, снабдена със ctуктура Q, е пример за многообразие (M, Q, g), за което Q не е паралелна.*

Гаусовата кривина на тази повърхнина е $K = \dfrac{\cos 2(x^1 + x^2) + \sin 2(x^1 + x^2) - 1}{\{1 + e^{2x^1} - \cos 2(x^1 + x^2)\}^2}$. Графиката й е дадена на Фигура 1.



Фигура 1.

Б) Задаваме повърхнина S_2 относно $Oxyz$ с уравненията

$$S_2: \quad x=(x^1)^2+(x^2)^2, \; y=2x^1x^2, \quad z=x^1+x^2,$$

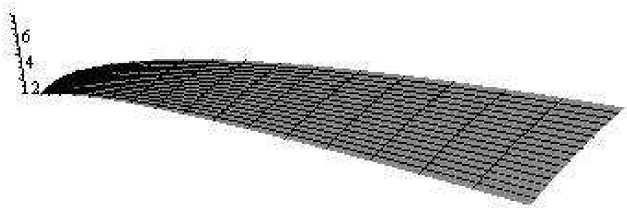
където $x^1 \neq x^2$. Метриката g има локални координати

$$g_{11}=g_{22}=A=4(x^1)^2+4(x^2)^2+1, \quad g_{12}=g_{21}=B=8x^2x^2+1.$$

Условията *A(p)>B(p)>0* са изпълнени. С директна проверка в (5) установяваме, че е в сила (4), откъдето следва верността на следното

Твърдение 5. *Повърхнината* S_2*, снабдена със стуктура Q, е пример за многообразие (M, Q, g), за което Q е паралелна.*

Гаусовата кривина K на тази повърхнина е нула. Графиката й е дадена на Фигура 2.



Фигура 2.

Благодарности. *Тази работа е частично финансирана по проект ФП17-ФМИ-008 на Фонд научни изследвания към ПУ „Паисий Хилендарски" – Пловдив.*

Литература.

[1] I. Dokuzova, Curvature properties of 4-dimensional Riemannian manifolds with a circulant structure, J. Geom. 108(2) (2017), 517-527.

[2] G. Dzhelepov, Spheres and circles in the tangent space at a point on a Riemannian manifold with respect to an indefinite metric, Novi Sad J. Math 48(1) (2018), 143-150.

[3] G. Dzhelepov, I. Dokuzova, D. Razpopov, On a three-dimensional Riemannian manifold with an additional structure, Plovdiv Univ. Paisii Khilendarski Nauchn. Trud. Mat. 38 (3) (2011), 17–27.

[4] D. Gribacheva, D.Mekerov, Conformal Riemannian P-manifolds with connections whose curvature tensors are Riemannan P-tensors, J. Geom. 105(2) (2014), 273-286.

[5] A. M. Naveira, A classification of Riemannian almost product manifolds, Rend. Mat. 7 (1983), no. 3, 577-592.

[6] D. Razpopov, Four-dimensional Riemannian manifolds with two circulant structures, in: Math. Educ. Math., Proc. 44th Spring Conf. of UBM, Borovets, (2015), 179-185.

[7] M. Staikova, K. Gribachev, Canonical conections and their conformal invariants on Riemannian P-manifolds, Serdica 18(3-4) (1992), 150-161.

[8] M. Staikova, K. Gribachev, D. Mekerov, Invariant hypersurfaces of Riemannian P-manifolds, Univ. Paisii Khilendarski Nauchn. Trud. Mat. 25(3) (1987), 253-266. (in Bulgarian)

[9] K. Yano, Differential geometry on complex and almost complex spaces, Pure and Applied Math. 49, New York, A Pergamon Press Book, (1965).